**Задача**. Точечный заряд находится в точке со сферическими координатами . Разложить потенциал заряда по мультиполям.

**Решение**. Мы используем одинаковое обозначение для потенциала и сферической координаты, поскольку это не приведет к путанице.

В теории электричества широко используется разложение по полиномам Лежандра, которое имеет вид:

Известно соотношение, которое носит название теоремы сложения сферических функций.

где

Подстановка одного выражения в другое дает:

В определении сферических функций есть некоторые отличия, которые исчезают при нормировке функций. Одно из определений такое

где

В теоретической физике Ландау-Лифшица функции определяются так:

где используется множитель .

Условие нормировки сферических функций:

где

Решение задачи записывается в виде

где

**Задача**. Заряд распределен в некотором объеме с объемной плотностью . Произвести разложение потенциала по мультиполям. Как изменится результат, если задана система точечных зарядов?

**Решение**. Потенциал объемного заряда находится интегрированием по объему

В сферических координатах

Следует рассмотреть два случая – точка вне объема и точка внутри объема .

Пусть :

– мультипольный момент порядка .

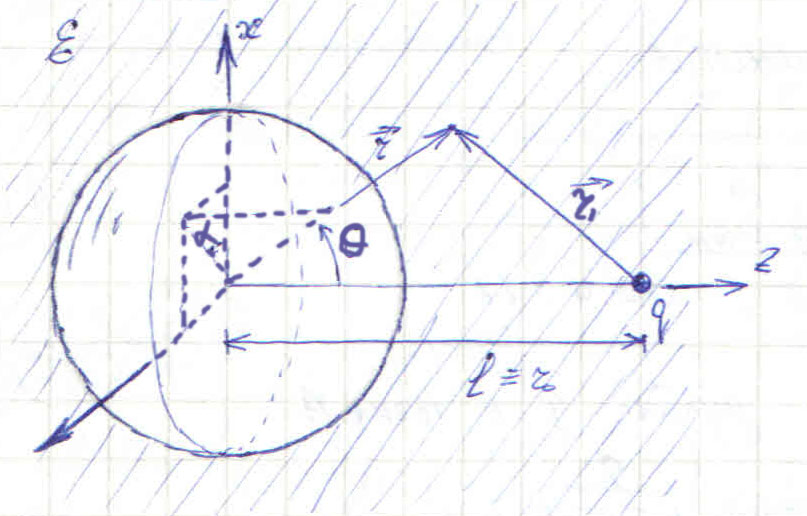
Пусть :

Для точечных зарядов интегралы преобразуются в суммы:

**Задача**. Проводящий шар радиуса находится в поле точечного заряда , отстоящего от центра шара на расстояние . Система погружена в однородный диэлектрик с проницаемостью . Найти потенциал поля и распределение индуцированных зарядов на шаре, если задан

а) потенциал шара

б) заряд шара



**Решение**. Разместим систему координат так как указано на рисунке. В этом случае поле симметрично относительно оси и не зависит от угла в сферической системе координат. [Ранее](6_уравнения_электростатики_1.docx#поле_незаряж_шара_в_однор_поле) мы решали задачу об искажении однородного поля при внесении в него незаряженного шара. Такая сфера, как мы видели, создает потенциал в виде:

Напомним, что полное поле рассматривалось как суперпозиция поля без шара и поля шара с индуцированными зарядами. Заряд создает вокруг себя потенциал . Все это дает основание утверждать, что полный потенциал можно искать в форме:

Поле индуцированных на шаре зарядов на бесконечности должно убывать, поэтому . Будем искать коэффициенты .

1. Итак, пусть на поверхности шара потенциал .

Разложение потенциала по полиномам Лежандра (первая задача в разделе):

В наших обозначениях:

Или

На поверхности шара :

Сумма может быть постоянной в двух случаях.

Если . Тогда , и

Если . Тогда и .

Объединим результат в итоговой формуле

Поверхностная плотность индуцированного заряда:

Заметим, что

Поэтому

1. Пусть теперь известен заряд шара, а потенциал не известен. В этом случае потенциал можно выразить через заряд шара.

Решаем полученные интегралы

Чтобы вычислить следующий интеграл, заметим, что

Тогда

Мы учли, что

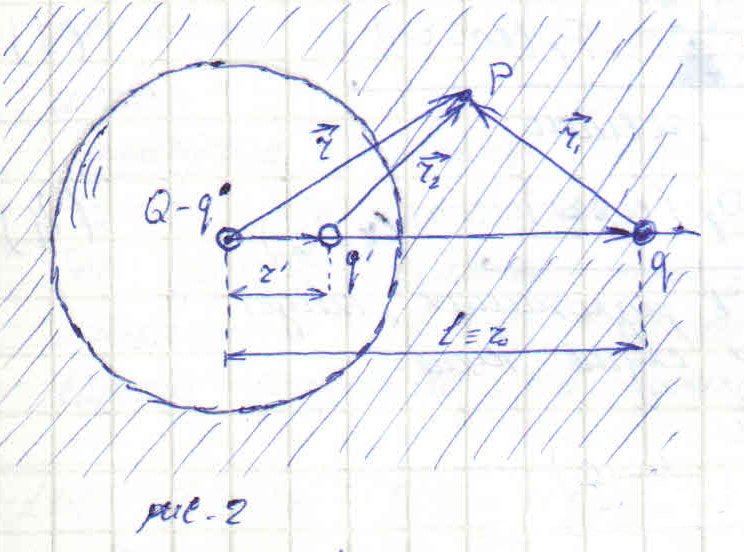
Видим, что при любом значении интеграл обращается в нуль, поэтому интерес представляют только слагаемые с .

Итак,

откуда

Можем записать

Формуле можно придать более наглядный вид, если поступить следующим образом.



На оси , внутри сферы, разместим точечный заряд

Аналогично тому, как раскладывался по мультиполям заряд мы разложим и этот заряд.

Пусть

тогда

Сравнивая с полученной ранее формулой, можем написать

Вывод. Систему «заряд + шар с зарядом» можно заменить системой из 3-х точечных зарядов: заряд в центре шара, заряд на расстоянии от центра шара и сам заряд .